

# Une Nouvelle source de Fractales: Les Equations Booléennes avec Retard, et leurs Applications aux Sciences de la Planète.

Michael Ghil <sup>1</sup> & Ilya Zaliapin <sup>2</sup>

*Cet article est une contribution des auteurs à la célébration du  
80ème anniversaire de Benoît MANDELBROT.  
Le "soleil radieux fractal" est notre cadeau d'anniversaire*

**Résumé :** Les Equations Booléennes avec Retard (en anglais Boolean Delay Equations: BDE) sont un nouveau type de modèles dynamiques semi-discrets avec des variables à valeurs booléennes évoluant dans un espace de temps continu. Les systèmes de BDE peuvent être classés en systèmes conservatifs ou dissipatifs, de manière analogue à ce qui prévaut dans la classification des équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles. Les solutions de certaines BDE conservatives produisent un accroissement de complexité avec le temps. Pour cette raison elles représentent des métaphores de l'évolution biologique ou de l'histoire humaine.

Les BDE dissipatives sont structurellement stables et produisent des équilibres multiples et des cycles limites aussi bien que des ensembles plus complexes à solution fractale tel "l'escalier du diable" ou le "soleil radieux fractal". Toutes les solutions aux BDE dissipatives ont une variance stationnaire. Les systèmes BDE de ce type, qu'ils soient libres ou forcés, ont été utilisés comme des modèles très idéalisés de changement climatique sur des échelles de temps portant sur des années, des décades, voire des ères paléoclimatiques.

Les BDE sont aussi utilisées, pour leur souplesse et leur efficacité en tant que modèles de cascades en collision, dans la modélisation et la prédiction des tremblements de terre, ainsi qu'en génétique. Certaines applications concernant le climat et la géodynamique viendront brièvement en illustration.

**Abstract.** Boolean Delay Equations (BDEs) are a novel type of semi-discrete dynamical models with Boolean-valued variables that evolve in continuous time. Systems of BDEs can be classified into *conservative* or *dissipative*, in a manner that parallels the classification of ordinary or partial differential equations. Solutions to certain conservative BDEs exhibit growth of complexity in time. They represent therewith metaphors for biological evolution or human history.

Dissipative BDEs are structurally stable and exhibit multiple equilibria and limit cycles, as well as more complex, fractal solution sets, such as Devil's staircases and "fractal sunbursts." All the solutions of dissipative BDEs have stationary variance. BDE systems of this type, both free and forced, have been used as highly idealized models of climate change on interannual, interdecadal and paleoclimatic time scales.

---

<sup>1</sup>Département Terre-Atmosphère-Océan et Laboratoire de Météorologie Dynamique, Ecole Normale Supérieure, Paris, et Department of Atmospheric and Oceanic Sciences et Institute of Geophysics and Planetary Physics, University of California, Los Angeles, USA E-mail: ghil@lmd.ens.fr

<sup>2</sup>Institute of Geophysics and Planetary Physics, University of California, Los Angeles, USA. E-mail: zal@ess.ucla.edu

BDEs are also being used as flexible, highly efficient models of colliding cascades in earthquake modeling and prediction, as well as in genetics. Some of the climatic and solid-earth applications will be briefly illustrated.

**Mots Clés:** Equations Booléennes avec Retard, Complexité, Systèmes dynamiques, El Niño/ Oscillation australe, Tremblements de terre.

## 1 Introduction

Les BDE sont un nouveau cadre de modélisation *taillé sur mesure* pour la formulation mathématique de modèles conceptuels de systèmes qui possèdent un comportement à effet de seuil, des rétroactions multiples et des retards temporels [10, 16, 17]. Les BDE sont conçues comme une première étape heuristique vers la compréhension de problèmes trop complexes pour être traités actuellement par un modèle utilisant des systèmes d'équations aux dérivées partielles. Bien sûr, on espère un jour pouvoir mettre en équations tout en les résolvant les phénomènes les plus complexes. Cependant dans la dynamique du climat tout comme dans la géophysique de la terre solide et dans d'autres domaines en sciences naturelles, les premières explications sont souvent au niveau purement conceptuel.

Les BDE fournissent un langage mathématique formel qui peut aider à faire le pont entre le raisonnement qualitatif et quantitatif. Qui plus est, il est plaisant de manipuler et de créer de belles fractales [37, 38] en utilisant de simples règles déterministes.

Dans un cadre de modélisation hiérarchique, on utilise généralement les modèles théoriques les plus simples pour présenter des hypothèses et saisir des mécanismes isolés, tandis que des modèles plus détaillés cherchent à simuler les phénomènes de façon plus réaliste et à tester la présence et l'effet des mécanismes suggérés par les modèles simples en les confrontant directement avec les observations [18]. La modélisation par BDE pourrait être la représentation la plus simple des concepts physiques pertinents. En même temps, les nouveaux résultats obtenus par un modèle BDE permettent de distinguer des phénomènes qui n'ont pas encore été mis en évidence par les outils conventionnels [47, 59, 60]. Ces résultats suggèrent la présence possible de mécanismes que l'on pourrait explorer en utilisant des modèles plus complexes, une fois détectée leur "empreinte" dans un modèle théorique simple. Tandis que l'étude des systèmes complexes suscite une attention toujours croissante, et qu'elle s'applique à divers domaines allant de la microbiologie à l'évolution des civilisations, en passant par l'économie et la physique, les modèles booléens et d'autres modèles discrets sont de plus en plus explorés [8, 21, 29, 44, 57].

Dans ce bref compte rendu, nous commençons par décrire la forme générale et les principales propriétés des BDE (Paragraphe 2). Ensuite nous donnons en illustration quelques applications à la dynamique des climats (Paragraphe 3) et à la physique des tremblements de terre (Paragraphe 4). Le "soleil radieux fractal" apparaît dans la Figure 3 du Paragraphe 3.5 et le caractère hautement intermittent et lacunaire de certaines séquences sismiques est "croqué" dans les Figures 5 et 8 du Paragraphe 4. Nous concluons dans le Paragraphe 5 avec quelques moyens d'enrichir notre expérience avec les BDE

et les fractales qu'elles produisent.

## 2 Les Equations Booléennes avec Retard (BDE)

Les BDE peuvent être classées dans les systèmes dynamiques "semi-discrets", pour lesquels les variables sont discrètes — typiquement booléennes, c'est-à-dire ne prenant que les valeurs 0 ("fermé") ou 1 ("ouvert") — alors que le temps est représenté par des valeurs continues. En tant que telles elles occupent le "coin manquant" du rhomboïde de la Figure 1, dans laquelle les systèmes dynamiques sont classés selon le caractère continu ou discret du temps ( $t$ ) et des variables d'état ( $x$ ).

Les systèmes dans lesquels à la fois les variables et le temps sont continus sont appelés des *flots* [3, 50] (coin supérieur du rhomboïde de la figure 1). Les champs vectoriels, les équations différentielles ordinaires (ODE en anglais pour "Ordinary Differential Equations") ou aux dérivées partielles (PDE en anglais pour "Partial Differential Equations"), les équations différentielles fonctionnelles (FDE en anglais pour "Functional Differential Equations"), et les équations différentielles avec retard (DDE en anglais pour Delay Differential Equations"), et les équations différentielles stochastiques (SDE en anglais pour "Stochastic Differential Equations") appartiennent à cette catégorie. Les systèmes comportant des variables à valeurs continues et un temps à valeurs discrètes (coin de gauche) sont connus sous le nom d'*applications* ("maps" en anglais) [7, 22] et ils comprennent les difféomorphismes, aussi bien que les équations aux différences finies, qui résultent de la discrétisation des ODEs ou PDEs respectivement. Dans les automates (coin inférieur), à la fois le temps et les variables prennent des valeurs discrètes ; les automates cellulaires (CA en anglais pour "Cellular Automata") et toutes les machines de Turing (y-compris les ordinateurs du monde réel) font partie de ce groupe [21, 57]. Les BDE et les logiques cinétique [53] et conservative qui les ont précédées, complètent le rhomboïde dans la figure en occupant le coin de droite restant.

### 2.1 Forme générale

Etant donné un système comportant  $n$  variables d'état réelles et continues  $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathcal{R}^n$  pour lequel existe des valeurs de seuil naturelles  $q_i \in \mathcal{R}$ , on peut associer à chaque variable  $v_i \in \mathcal{R}$  une variable à valeur booléenne  $x_i \in \mathcal{B} = \{0, 1\}$ , en posant

$$x_i = \begin{cases} 0, & v_i \leq q_i \\ 1, & v_i > q_i \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Les équations qui décrivent l'évolution du vecteur booléen  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{B}^n$ , du fait des interactions retardées dans le temps entre les variables booléennes  $x_i \in \mathcal{B}$  sont de la forme:

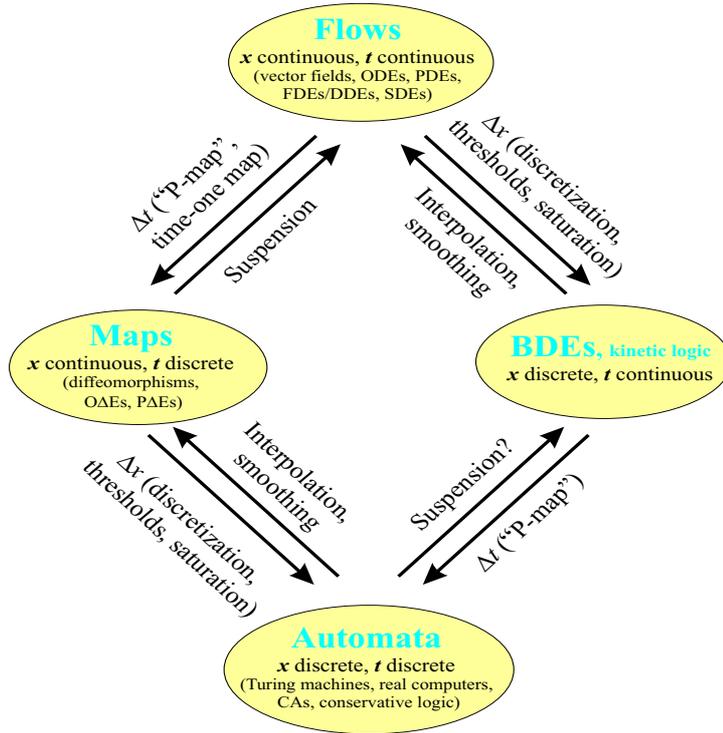


Figure 1: The place of BDEs within dynamical system theory. Note the links: The discretization of  $t$  can be achieved by the Poincaré map (P-map) or a time-one map, leading from **Flows** to **Maps**. The opposite connection is achieved by suspension. To go from **Maps** to **Automata** we use the discretization of  $x$ . Interpolation and smoothing can lead in the opposite direction. Similar connections lead from **BDEs** to **Automata** and to **Flows**, respectively.

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_1(t - \theta_{1,1}), x_2(t - \theta_{1,2}), \dots, x_n(t - \theta_{1,n})), \\ x_2 = f_2(x_1(t - \theta_{2,1}), x_2(t - \theta_{2,2}), \dots, x_n(t - \theta_{2,n})), \\ \vdots \\ x_n = f_n(x_1(t - \theta_{n,1}), x_2(t - \theta_{n,2}), \dots, x_n(t - \theta_{n,n})). \end{cases} \quad (2)$$

Les fonctions  $f_i : \mathcal{B}^n \rightarrow \mathcal{B}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sont définies par des équations booléennes impliquant des opérateurs logiques et des retards. Chaque valeur de retard  $\theta_{i,j} \in \mathcal{R}$ , où  $1 \leq i, j \leq n$ , représente le temps nécessaire pour qu'un changement de la variable  $x_j$  affecte la variable  $x_i$ . On pose, sans perte de généralité,  $0 \leq \theta_{i,j} \leq \max_{i,j} \theta_{i,j} = 1$ .

## 2.2 Quelques résultats théoriques

Nous résumons ici quelques résultats théoriques de base issus de la théorie des BDE ; on peut retrouver leur forme d'origine complète dans Ghil et Mulhaupt [16].

**Existence et Unicité des Solutions.** Considérons un système BDE et des données initiales constantes par morceaux sur un intervalle de temps égal au retard le plus long. On peut alors démontrer par construction l'existence d'une solution unique en utilisant un lemme montrant qu'il n'existe pas de solutions avec un nombre infini de " sauts " (entre 0 et 1) dans tout intervalle de temps fini [10].

**Le lemme du "Pigeonnier ".** Tous les systèmes de BDE qui ne possèdent que des retards à valeur rationnelle peuvent en effet être réduits à des automates cellulaires finis. La réduction des retards à leur moindre dénominateur commun  $q_0$  conduit à une partition de l'axe temporel en segments dans lesquels les variables d'état demeurent constantes et dont la longueur est un multiple entier de  $q_0$ . Comme il existe uniquement un nombre fini de possibilités d'assigner deux valeurs à ces segments, des répétitions doivent se produire, et le seul comportement asymptotique possible est constant ou périodique dans le temps.

**Classification.** Ghil et Mulhaupt [16] ont classé les systèmes BDE comme suit : Tous les systèmes comportant des solutions qui sont immédiatement périodiques pour tous les retards à valeur rationnelle sont *conservatifs* tandis que les systèmes qui produisent, pour certains retards rationnels, un comportement transitoire avant d'atteindre cette périodicité sont *dissipatifs*. Les *flots* analogues sont des systèmes dynamiques conservatifs (*e.g.*, Hamiltoniens) [20, 35] en opposition avec les systèmes dissipatifs forcés (*e.g.*, le système bien connu de Lorenz [36]). On trouve des exemples typiques de systèmes conservatifs dans la mécanique céleste [2], tandis qu'on utilise souvent des systèmes dissipatifs pour modéliser les phénomènes en géosciences[15].

**Comportement asymptotique.** Les types suivants de comportements asymptotiques ont été observés dans les systèmes BDE : (a) *Point fixe* — la solution atteint l'un des états parmi un nombre fini disponible et en reste là ; (b) *cycle limite* — la solution devient périodique au bout d'un temps fini ; et (c) *complexité croissante* — certaines classes de BDE avec des retards non commensurables se sont révélées avoir des solutions de complexité croissante, la complexité étant mesurée en nombre de sauts par unité de temps. Ce nombre croît en tant que puissance fractionnaire positive du temps  $t$  [10], avec des oscillations superposées log-périodiques [16].

**Théorème d'approximation.** Le théorème qui suit facilite l'exploration numérique des solutions des systèmes BDE : On peut obtenir une approximation de toutes les solutions des systèmes BDE (dans la norme  $\mathcal{L}_2$ ) pour un temps donné fini par les solutions périodiques d'un système voisin: système qui n'a que des retards à valeur rationnelle.

## 3 Un Modèle BDE pour l'Oscillation Australe/El Niño

L'Oscillation Australe El-Niño (ENSO en anglais pour "El Niño Southern Oscillation") est le signal le plus marquant d'une variabilité climatique s'étalant sur des échelles de temps allant de la saison à plusieurs années. Depuis des siècles, le phénomène était connu des pêcheurs de la côte occidentale de l'Amérique du Sud qui étaient témoins d'un brusque réchauffement sporadique des eaux froides riches en nutriments le long de cette côte, réchauffement très néfaste à leur campagne de pêche [11, 45]. Son apparition fréquente peu après Noël leur inspira le nom "El Niño" d'après l'enfant Jésus. Depuis les années 1970, la recherche sur les effets climatiques d'El Niño a démontré qu'ils s'étendent à un domaine beaucoup plus vaste que de simples manifestations côtières [11, 19]. Cette constatation a conduit à une prise de conscience de la signification du problème ENSO, et elle a déclenché un effort soutenu pour améliorer la prédiction des événements exceptionnellement violents d'El Niño [34].

### 3.1 Ingrédients conceptuels

Bjerknes [5] qui a fondé la recherche moderne sur le problème ENSO, a suggéré un effet de *rétroaction positive* en tant que mécanisme de l'instabilité interne à l'origine des grandes anomalies des températures de surface maritime (SST en anglais pour "Sea Surface Temperature") dans l'est de l'Océan Pacifique Tropical. En utilisant des observations de l'Année Internationale de la Géophysique (1957-58), il s'est rendu compte que ce mécanisme devait impliquer une interaction entre l'air et la mer dans les tropiques.

En compensation de la rétroaction positive de Bjerknes il existe une rétroaction négative dans le système qui permet de revenir à des conditions plus froides dans la partie est du bassin. Cette rétroaction négative implique l'existence d'une adaptation de l'océan au forçage atmosphérique au moyen d'ondes, à l'échelle de la planète, qui sont piégées au voisinage de l'équateur par la force de Coriolis : des ondes de Kelvin plus rapides et des ondes de Rossby plus lentes qui se propagent à travers l'océan pour, en définitive, créer une alternance en balançoire, dans l'espace comme dans le temps, entre les phases chaudes et froides d'El Niño et La Niña. Un élément important est de plus la présence des rythmes saisonniers, qui imposent leurs maxima de réchauffement et de refroidissement.

### 3.2 Les variables et les équations du modèle

Le modèle [47] fonctionne avec cinq variables booléennes. L'état de *l'océan* est dépeint par des anomalies de SST, exprimées par une combinaison de deux variables booléennes,  $T_1$  et  $T_2$ . Les conditions *atmosphériques* au-dessus de l'Océan Pacifique sont décrites par les variables  $U_1$  et  $U_2$ ; celles-ci expriment l'état des alizées. Autant pour l'océan que pour l'atmosphère la première variable,  $T_1$  ou  $U_1$ , donne le signe positif ou négatif

de l'anomalie, tandis que la seconde,  $T_2$  ou  $U_2$ , donne le caractère fort ou faible de son amplitude. Ainsi, chacune des deux paires  $(T_1, T_2)$  et  $(U_1, U_2)$  définit une variable discrète à quatre niveaux qui représente des déviations tantôt fortement positives, tantôt légèrement positives, tantôt légèrement négatives, tantôt fortement négatives vis à vis de la moyenne climatologique. Le forçage externe par le *cycle saisonnier* est représentée par une variable booléenne  $S$  à deux niveaux.

Les variables atmosphériques  $U_i$  sont " asservies " à l'océan [28, 41]:

$$U_i(t) = T_i(t - \beta), \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

L'évolution du signe  $T_1$  des anomalies de SST est modélisée selon l'hypothèse de Bjerknes ; elle implique les ajustements des ondes océaniques:

$$T_1(t) = \{(R \wedge \neg U_1)(t - \tau)\} \vee \{\neg R(t - \tau) \wedge U_2(t - \beta)\}; \quad (4)$$

ici les symboles  $\vee$  et  $\wedge$  représentent respectivement les opérateurs logiques binaires OU et ET. Un signal d'onde de Rossby  $R(t) = U_1(t) \Delta U_2(t)$  est défini via l'opérateur booléen  $\Delta$  qui prend la valeur 1 si et seulement si les deux opérandes ont la même valeur. Le forçage  $S$  lié au cycle saisonnier est donné par  $S(t) = S(t - 1)$ ; il affecte les l'amplitude  $T_2$  des anomalies de SST via une amplification des événements lorsque prévalent des conditions saisonnières favorables:

$$T_2(t) = \{[S \Delta T_1](t - \beta)\} \vee \{\neg(S \Delta T_1) \wedge T_2\}(t - \beta)\}. \quad (5)$$

Le temps  $t$  est mesuré en unités d'une année.

Les principaux paramètres du modèle sont les deux retards :  $\beta$  et  $\tau$ ; ils sont associés respectivement aux processus locaux d'ajustement et aux processus couvrant l'ensemble du bassin. Les changements du vent sont censés être influencés par la SST après un petit retard  $\beta$  de l'ordre de quelques jours à quelques semaines. Pour la taille du retard  $\tau$  nous adoptons le point de vue de Jin [24] sur le mécanisme de l'oscillateur retardé ; servons-nous en pour représenter le temps qui s'écoule tandis qu'adviennent plusieurs processus d'ajustement océanique: ce temps peut varier d'environ un mois dans la limite d'ondes rapides [25, 26, 40] jusqu'à environ deux ans.

### 3.3 Solutions des modèles

En étudiant le phénomène ENSO nous nous sommes tout d'abord intéressés à la dynamique des états de SST représentée par le vecteur booléen  $(T_1, T_2)$  à deux variables. Pour être plus spécifique, nous avons affaire à une variable scalaire à quatre niveaux

$$ENSO = \begin{cases} -2, & \text{extrême La Niña, } T_1 = 0, T_2 = 0, \\ -1, & \text{faible La Niña, } T_1 = 0, T_2 = 1, \\ 1, & \text{faible El Niño, } T_1 = 1, T_2 = 0, \\ 2, & \text{extrême El Niño, } T_1 = 1, T_2 = 1. \end{cases} \quad (6)$$

Régi par les équations du modèle, le vecteur ENSO prend précisément les valeurs  $\{-2, -1, 1, 2\}$  dans cet ordre, simulant ainsi les cycles ENSO observés. Les cycles suivent la même séquence d'états, bien que la durée de passage par chaque état change de modèle à chaque fois que  $\tau$  change. La période  $P$  d'une solution oscillatoire simple est définie comme le temps qui sépare le déclenchement de deux événements chauds consécutifs,  $ENSO = 2$ . Nous utilisons la définition de la période du cycle pour classer les différentes solutions du modèle (voir Fig. 2).

*(i) Solutions périodiques avec un cycle unique (périodicité simple).* Chaque succession d'événements, ou cycle interne, est ici complètement verrouillé de phase au cycle des saisons, c'est-à-dire, que les événements chauds ont toujours leur amplitude maximale ( $ENSO=2$ ) au même moment de l'année. Pour chaque valeur déterminée de  $\beta$ , comme  $\tau$  augmente, il s'en suit des intervalles  $\tau$  sur lesquels la solution à une périodicité simple égale à 2, 3, 4, 5, 6 et 7 ans.

*(ii) Solutions périodiques avec plusieurs cycles (périodicité complexe).* Nous décrivons de telles séquences, dans lesquelles plusieurs cycles distincts constituent la périodicité complète, via la paramètre  $\bar{P} = P/n$ ; où  $P$  est la longueur de la séquence et  $n$  le nombre de cycles de la séquence. De manière notoire, lors d'une transition d'une période de trois ans à une période de quatre ans (voir le second encart de la Fig. 2),  $\bar{P}$  devient une fonction en escalier non décroissante de  $\tau$  qui ne prend que des valeurs rationnelles, échelonnées sur un "escalier du diable".

### 3.4 La route quasi-périodique (QP) vers le chaos dans le modèle BDE

Le verrouillage de fréquence observé pour nos solutions de BDE ci-dessus, est une marque spécifique de la route universelle QP vers le chaos. Son prototype mathématique est donné par l'application circulaire d'Arnold [3] et représenté par l'équation:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega + 2\pi K \sin(2\pi\theta_n) \pmod{1}. \quad (7)$$

L'équation (7) définit le mouvement d'un point décrit par l'angle  $\theta$  sur un cercle unitaire qui effectue des sauts d'angle d'une valeur  $\Omega$  le long de la circonférence du cercle. Le mouvement de ce point est aussi soumis à des "corrections" sinusoïdales non-linéaires, dont le niveau de non-linéarité est contrôlé par un paramètre  $K$ .

Nous observons le nombre de rotations ("winding number")  $\omega = \omega(\Omega, K) = \lim_{n \rightarrow \infty} [(\theta_n - \theta_0)/n]$ , qui peut être grossièrement décrit comme le saut moyen du point par itération. Lorsque l'influence de la non-linéarité est faible, ce saut moyen - et donc la périodicité moyenne - est en gros déterminée par  $\Omega$ ; il peut être rationnel ou irrationnel, ce dernier cas étant plus probable en raison de la mesure positive des valeurs irrationnelles sur l'intervalle-unité. Si la non-linéarité  $K$  est augmentée, "les langues d'Arnold" - où le nombre de rotations  $\omega$  reste fixé à une valeur rationnelle constante sur des intervalles entiers, - se forment et s'élargissent. Lorsqu'on atteint une valeur critique du paramètre, il ne reste plus que des valeurs rationnelles pour le nombre de rotations et il y a cristallisation d'un

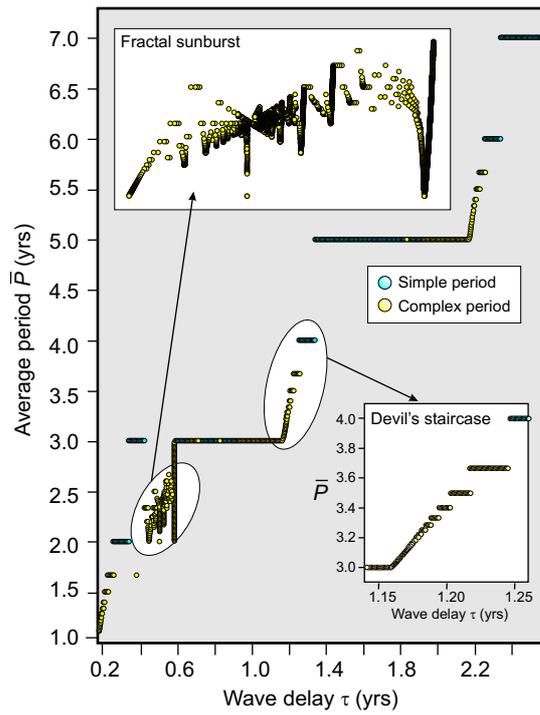


Figure 2: Devil’s staircase and fractal sunburst: A bifurcation diagram showing the average cycle length  $\bar{P}$  vs. the wave delay  $\tau$  for a fixed  $\beta = 0.17$ . Blue dots indicate purely periodic solutions; orange dots are for complex periodic solutions; small black dots denote aperiodic solutions. The two insets show a blow-up of the overall, approximate Devil’s staircase between periodicities of two and three years (“fractal sunburst”) and of three and four years (“Devil’s staircase”).

”escalier du diable” complet. Au-delà de cette valeur, le chaos règne car le système saute irrégulièrement entre des résonances [23, 49].

La longueur moyenne  $\bar{P}$  du cycle défini pour notre système ENSO de BDE est clairement analogue au nombre de rotations de l’application circulaire à la fois dans sa définition et dans son comportement. Remarquez que la route QP vers le chaos dépend de manière essentielle de deux paramètres :  $\Omega$  et  $K$  pour l’application circulaire et  $\beta$  et  $\tau$  pour notre modèle BDE.

### 3.5 Le ”soleil radieux fractal” : un ”attracteur bizarre”

Lorsque le système subit la transition d’une période moyenne de deux ans à une période de trois ans, il y a émergence d’une structure beaucoup plus complexe et jusqu’ici insoupçonnée de ”soleil radieux fractal” (Fig. 3, et premier encart dans Fig. 2). Avec l’accroissement du retard d’onde  $\tau$  des mini-échelles se forment, s’effondrent ou descendent pour se remettre à monter à nouveau. La valeur critique de ( $\tau \cong 0.5$  ans) représente le foyer du schéma; au voisinage de ce point, les mini-échelles se condensent rapidement et la structure devient auto-similaire, tandis que chaque agrandissement révèle le fait que le schéma est répété à une échelle plus faible. Nous appelons ça un ”attracteur bizarre” par ce qu’il est plus qu’étrange: les attracteurs étranges apparaissent dans un espace des phases du système, pour des valeurs fixées du paramètre, tandis que notre structure apparaît dans l’espace de paramètres et de phases du modèle ou diagramme de bifurcation, comme ”l’escalier du diable”.

On montre l’influence du retard  $\beta$  associé aux processus locaux, conjugué avec celui du retard  $\tau$  associé à la dynamique de propagation des ondes dans les ”gradins du diable” à trois dimensions (ou ”terrasse du diable” selon Jin et coll. [28]) de la Fig. 4. Remarquez que le modèle de Jin et coll.[27, 28] est un modèle intermédiaire dans la terminologie des hiérarchies de modélisation [18]: il est basé sur un système de PDE non linéaires selon une seule dimension spatiale (la longitude le long de l’équateur). Les ”gradins du diable” de notre modèle BDE ressemblent assez à ceux du modèle intermédiaire ENSO de Jin et coll. [28]. Ce dernier, cependant ne produisait pas de ”soleil radieux fractal” qui apparaît dans son ensemble comme un tout nouvel ajout à la galerie des peintures fractales [37, 38].

## 4 Un modèle BDE pour la sismicité

Des modèles sur réseau de systèmes d’éléments en interaction sont souvent appliqués pour modéliser la sismicité, à commencer par les travaux de Burridge et Knopoff [6], Allègre et coll. [1], et Bak et coll. [4]. L’état de l’art est résumé dans [31, 32, 42, 46, 55]. Récemment des modèles de cascades en collision [12, 13, 59, 60] ont pu reproduire un vaste ensemble de caractéristiques observées de la dynamique des tremblements de terre [30, 48, 54]: (i) le cycle sismique ; (ii) l’intermittence du régime sismique ; (iii) la distribution de taille des tremblements de terre connue comme la relation de Gutenberg-Richter ; (iv)

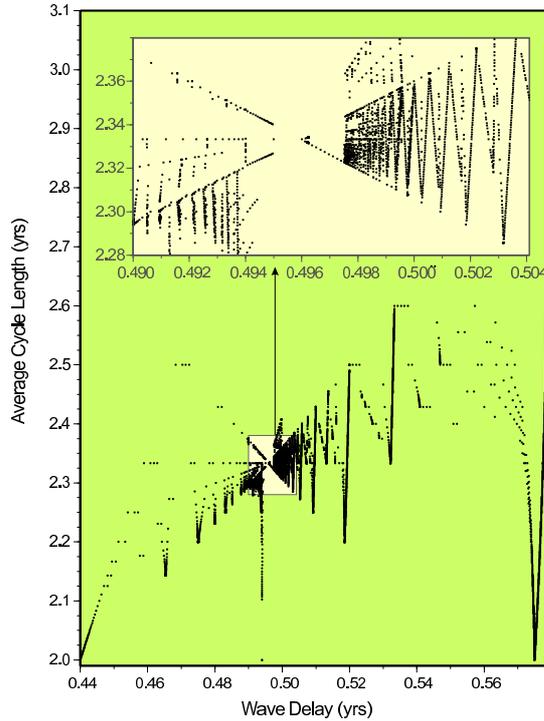


Figure 3: Fractal sunburst: a BDE solution pattern in phase-parameter space. A blow-up of the transition zone from average periodicity two to three years;  $\tau = 0.4\text{--}0.58$ ,  $\beta = 0.17$ . The inset is a zoom on  $0.49 \leq \tau \leq 0.504$ . A complex mini-staircase structure reveals self-similar features, with a focal point at  $\tau \approx 0.5$ .

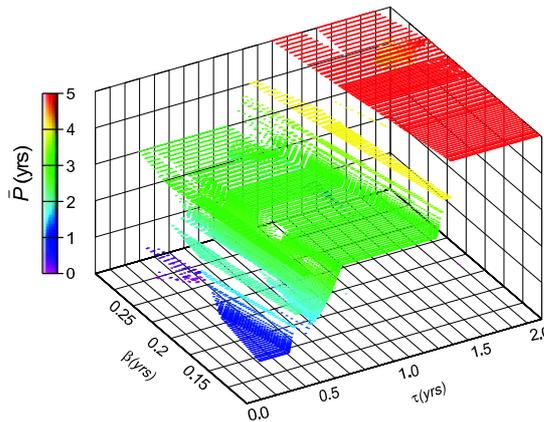


Figure 4: The Devil's bleachers: A three-dimensional regime diagram showing the average cycle length  $\bar{P}$ , portrayed in both height and color, vs. the two delays  $\beta$  and  $\tau$ . Oscillations are produced even for very small values of  $\beta$ , as long as  $\beta \leq \tau$ . Variations in  $\tau$  determine the oscillation's period, while changing  $\beta$  establishes the bottom step of the staircase, shifts the location of the steps, and determines their width.

le groupement des tremblements de terre dans l'espace et le temps ; (v) les corrélations à longue distance entre événements sismiques ; et (vi) une variété de structures temporelles sismiques annonçant un fort tremblement de terre. Une partie de ces avancées est due à l'usage des BDE dans la modélisation des phénomènes de cascades en collisions.

## 4.1 Ingrédients conceptuels

Les modèles de cascades en collisions [12, 13, 59, 60] synthétisent trois phénomènes qui jouent un rôle important dans de nombreux systèmes complexes : (i) le système possède une structure hiérarchique ; (ii) le système est constamment sous la contrainte de (ou piloté par) forces externes; et (iii) les éléments du système cèdent sous la charge (tombent en panne), entraînant la redistribution de la charge et de la résistance à travers le système tout entier. Dans un deuxième temps, on observe une "guérison" des éléments défaillants qui assure ainsi la continuité du fonctionnement du système.

La charge est appliquée au sommet de la hiérarchie et transmise vers le bas, formant ainsi *une cascade directe de chargement*. Les défaillances commencent à l'échelon le plus bas de la hiérarchie, et elles se propagent ensuite graduellement vers le haut, formant ainsi *une cascade inversée de défaillances*, qui est suivie d'une "guérison". L'interaction entre cascades directes et inverses produit la dynamique du système: la mise en charge déclenche les défaillances, et les défaillances entraînent une nouvelle répartition de la charge et un allègement. Dans son application à la sismicité, la structure hiérarchique du modèle représente un réseau de failles, la mise en charge imite l'effet des forces tectoniques, et les défaillances imitent les tremblements de terre.

## 4.2 La structure du modèle et les paramètres

Notre modèle BDE [59, 60] agit sur un arbre ternaire, auquel chaque élément est connecté en interagissant avec ses six voisins les plus proches : le parent, deux jumeaux et trois enfants. A chaque moment un élément donné peut être soit *intact* ou *défaillant*, et subissant ou non une charge. L'état d'un élément  $e$  à un moment  $n$  est alors défini par deux fonctions booléennes  $s_e(n) = \{\text{'intact' ou 'défaillant'}\}$  et  $l_e(n) = \{\text{'sans charge' ou 'chargé'}\}$ . Un élément du système peut passer d'un état à l'autre sous l'influence de ses voisins les plus proches et de sources externes.

La dynamique du système est contrôlée par les retards de temps entre une influence donnée et le passage à un autre état. Les deux retards principaux sont le temps de mise en charge  $\Delta_L$  nécessaire pour qu'un élément non chargé subisse une charge sous l'influence de son parent, et le temps de guérison  $\Delta_H$  nécessaire pour qu'un élément défaillant se répare. Les défaillances sont démarrées au hasard parmi les éléments au niveau le plus bas de l'arbre.

### 4.3 Les solutions du modèle

Les sorties du modèle peuvent être représentées par un catalogue de tremblements de terre - c'est-à-dire de défaillances de ses éléments - semblable aux catalogues routiniers les plus simples des tremblements de terre observés:

$$\mathcal{C} = (t_k, m_k, h_k), k = 1, 2, \dots; t_k \leq t_{k+1}. \quad (8)$$

Ici  $t_k$  est le temps de démarrage d'une rupture ;  $m_k$  est la magnitude, une mesure logarithmique de l'énergie libérée par le séisme ; et  $h_k$  est le vecteur comprenant les coordonnées de l'hypocentre. Ce dernier est une approximation ponctuelle de la zone dans laquelle la rupture a commencé.

La description quantitative des séquences du modèle sismique est donnée par deux mesures. La première est la densité  $\rho(n)$  des éléments qui sont défaillants au moment  $n$ :

$$\rho(n) = [\nu_1(n) + \dots + \nu_m(n)] / m. \quad (9)$$

Ici  $\nu_i(n)$  est la fraction d'éléments défaillants au  $i$ -ème niveau de la hiérarchie au moment  $n$ , tandis que  $m$  représente la profondeur ("hauteur") de l'arbre. Nous considérerons seulement la moyenne de cette mesure sur un intervalle de temps  $I$  et nous la symboliserons par  $\rho(I)$ .

La seconde mesure est celle de l'irrégularité  $G(I)$  de la libération d'énergie sur un intervalle de temps  $I$ ; sa définition technique complète est quelque peu compliquée à reproduire ici ; voir [59]. Néanmoins,  $G$  a une interprétation intuitive transparente : sa valeur est égale à 1 pour un catalogue se résumant à un seul événement (fonction delta, explosion d'énergie), et elle vaut zéro pour un processus de Poisson marqué (libération d'énergie uniforme). Généralement  $G$  prend des valeurs comprises entre 0 et 1 selon le taux d'irrégularité de la libération d'énergie.

### 4.4 Régimes sismiques

Le modèle produit des séquences synthétiques qui peuvent être divisées en trois régimes sismiques comme dans la Fig. 5. Le régime **H** correspond à *une sismicité élevée et pratiquement périodique* (graphique du haut). Les fractures au sein de chaque cycle atteignent toujours le niveau le plus élevé  $m$ . La séquence est approximativement périodique, au sens statistique de la cyclo-stationnarité. Le régime **I** produit *une sismicité intermittente* (graphique du milieu). La sismicité atteint le niveau  $m$  pour certains cycles, mais pas tous. Le régime **L** est caractérisé par *une sismicité faible ou modérée* (graphique du bas). Aucun cycle n'atteint le niveau supérieur et l'activité sismique au niveau bas ou modéré est beaucoup plus constante, sans les longs intervalles de repos présents dans les régimes **H** et **I**. Dans la Fig. 6, on montre la localisation de ces trois régimes dans le plan des deux paramètres clés  $(\Delta_L, \Delta_H)$ .

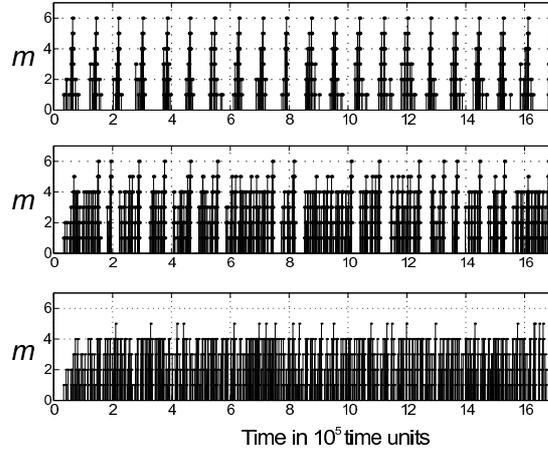


Figure 5: Three seismic regimes: sample of earthquake sequences. Top panel – regime **H** (High),  $\Delta_H = 0.5 \cdot 10^4$ ; middle panel – regime **I** (Intermittent),  $\Delta_H = 10^3$ ; bottom panel – regime **L** (Low),  $\Delta_H = 0.5 \cdot 10^3$ . Only a small fraction of each sequence is shown, to illustrate the differences between regimes.

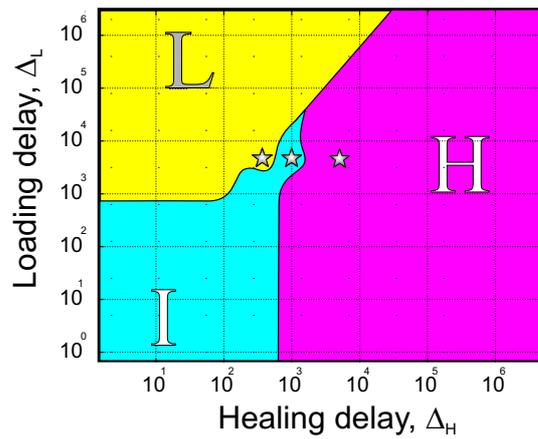


Figure 6: Regime diagram in the  $(\Delta_L, \Delta_H)$  plane of the loading and healing delays. Stars correspond to the sequences shown in Fig. 5.

## 4.5 Diagramme de bifurcation

La Figure 7 illustre la transition entre les régimes dans le plan des paramètres  $(\Delta_L, \Delta_H)$ . Le graphique (a) montre dans ce plan une trajectoire rectangulaire qui passe à travers les trois régimes et qui passe par le point triple. Nous isolons 30 points de cette trajectoire ; ils sont indiqués sur la figure par de petits cercles. Les trois paires de points qui correspondent aux transitions entre les régimes se distinguent par des cercles un peu plus grands et de plus ils sont marqués par des lettres, par exemple (A) et (B) marquent la transition entre le régime **H** et le régime **L**.

Nous estimons le regroupement  $G(I)$  et la densité moyenne  $\rho(I)$  sur un intervalle de temps  $I = [0, 2 \cdot 10^6]$ , pour des séquences synthétiques représentatives correspondant aux 30 points marqués sur le trajet rectangulaire dans la Figure 7a; ils sont montrés dans la figure 7b. Les valeurs de  $G$  chutent de manière spectaculaire, de 0,8 à 0,18 entre les points (A) et (B): ceci signifie que la libération d'énergie passe de valeurs très irrégulières à des valeurs pratiquement uniformes lors du passage entre les régimes **H** et **L**. Néanmoins, cette transition ne change pratiquement pas la densité moyenne  $\rho$  des défaillances.

Les transitions entre les autres paires de régimes sont beaucoup moins raides. Le taux de regroupement  $G$  chute plus tard de  $G = 0.18$  à  $G \approx 0.1$  et demeure ensuite à ce même niveau bas au cours du régime **L**. Il augmente graduellement, bien que de façon non monotone, de 0,1 à 0,8 entre les points (C) et (A), sur son chemin entre les régimes **I** et **H**. L'augmentation de  $\Delta_L$  le long du côté droit de la trajectoire rectangulaire correspond à un niveau de regroupement fixe,  $G \approx 0.8$ .

La transition entre les régimes est illustrée plus loin dans la Fig. 8. Chaque graphique montre un fragment des six séquences synthétiques qui correspondent aux points (A)-(F) de la Figure 7a. La différence marquée de caractère pour l'énergie libérée lors de la transition entre les régimes **H** (point (A)) et **L** (point(B)) est très explicite ici aussi. Les deux autres transitions, de (C) à (D) et de (E) à (F), sont beaucoup plus lisses. Cependant, elles mettent en exergue le caractère intermittent du régime **I**, auxquels les points (D) et (E) appartiennent.

## 5 Quoi d'autre?

Les développements et les applications des BDE ont commencé il y a deux décennies, ce qui est une période très courte par comparaison à celle sur laquelle s'étalent les travaux basés sur les ODE et PDE et même pour les travaux touchant aux automates cellulaires. Cependant les résultats déjà obtenus ont suffisamment d'intérêt pour garantir la continuation des études dans ce domaine.

Méthodologiquement, on pourrait souhaiter exploiter les "BDE partielles" dans lesquelles le nombre de variables booléennes est très grand voire infini. Ces systèmes se situent dans le même rapport avec les "BDE ordinaires" étudiées jusqu'ici que le sont les PDE avec les ODE. On peut facilement imaginer quelques résultats de base pour les BDE hyperboliques partielles, dans lesquelles tous les opérateurs qui relient des variables spatiale-

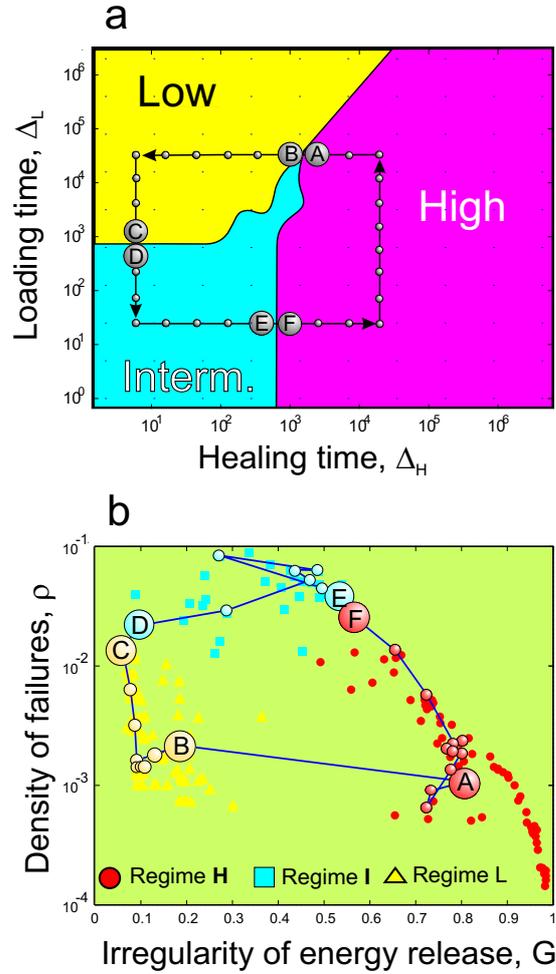


Figure 7: Bifurcation diagram for the BDE seismic model. a) Closed trajectory in the delay plane ( $\Delta_L$ ,  $\Delta_H$ ); b) The measures  $G$  and  $\rho$ , calculated along the parameter-plane trajectory shown in panel (a). The transition between points (A) and (B), *i.e.* between regimes **H** and **L**, is very sharp according to the irregularity of energy release ( $G$ ). At the same time, it is almost negligible by the measure  $\rho$ .

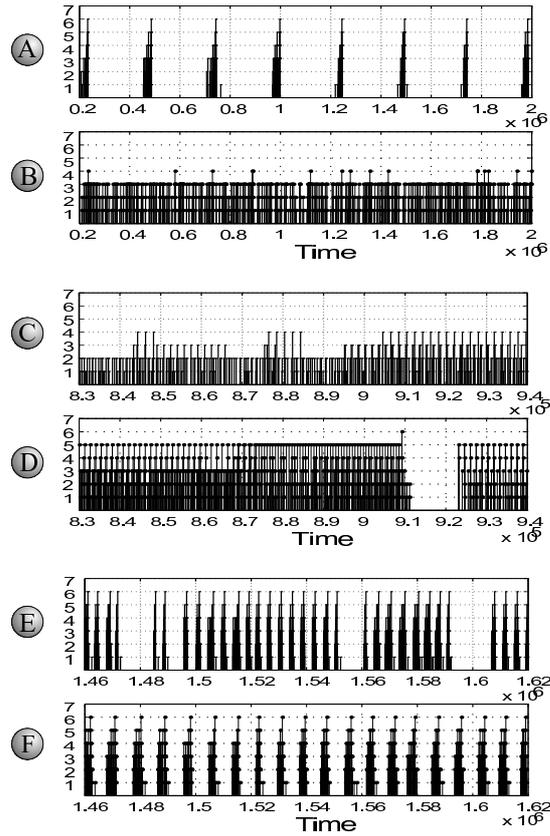


Figure 8: Synthetic sequences corresponding to the points along the trajectory in parameter space (Fig. 7a). The panels illustrate the transitions between the regimes **H** and **L** — panels (A) and (B); **L** and **I** — (C) and (D); and **I** and **H** — (E) and (F). The transition from (A) to (B) is very pronounced, while the other two transitions are smoother.

ment adjacentes sont conservatifs, autant que pour les BDE paraboliques dans lesquelles les opérateurs incluraient aussi quelques éléments dissipatifs.

Wright et coll. [58] ont déjà envisagé la moyennisation sur un ensemble de solutions des BDE sujettes à des données initiales randomisées. Il serait même plus intéressant d'envisager la perturbation aléatoire des retards.

Du point de vue des applications, les BDE ont été utilisées de manière assez intensive jusqu'ici dans la dynamique du climat [17, 33, 39, 43, 58] et elles se fraient des passages significatifs dans la géophysique de la terre solide [59, 60]. L'application récente aux sciences du vivant est des plus intéressantes (Oktem et coll. [44]); elle représente en un sens un retour aux concepts du généticien René Thomas, le père de la cinétique logique [51, 52, 53].

Il semblerait que les BDE conviennent bien à l'exploration de phénomènes assez mal compris, comme ceux du domaine socio-économique. Qui plus est, la robustesse des solutions assez régulières pour une vaste classe de BDE, en présence d'un vaste ensemble de retards, et une grande variété d'états initiaux, suggère des applications intéressantes à certains problèmes dans des calculs massivement parallèles.

**Remerciements.** C'est avec plaisir que nous remercions l'Académie Européenne Interdisciplinaire des Sciences et les organisateurs de la Conférence Internationale en l'honneur des 80 ans de Benoît Mandelbrot d'avoir invité l'un d'entre nous (M.G.) à donner une conférence en cette occasion pleine de joie. Nos remerciements vont à Michel Gondran et Irène Herpé-Litwin pour la traduction en français de texte. Nous nous sentons redevables à l'égard de tous les collaborateurs qui nous ont aidés à formuler, analyser et appliquer les BDE : *D.Dee* (NASA Goddard), *V.I. Keilis-Borok* (IGPP, UCLA et MITPAN, Moscou), *A.P. Mullhaupt* (Wall Street), *P. Pestiaux* (Total, France), et *A. Saunders* (Magnet High School, Van Nuys). Ce travail a reçu l'appui du fonds de la NSF, ATM-0082131 et du projet n° 012975 (NEST) de la Commission Européenne, " Evénements extrêmes: Causes et conséquences (E2-C2) "

## References

- [1] Allègre, C. J., J. L. Le Mouél, and A. Provost, 1982. Scaling rules in rock fracture and possible implications for earthquake prediction. *Nature*, 297, 47-49.
- [2] Arnol'd, V. I., 1978. *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 462 pp.
- [3] Arnol'd, V. I., 1983. *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, New York.
- [4] Bak, P., C. Tang, and K. Wiesenfeld, 1988. Self-organized criticality. *Phys. Rev. A*, 38, 364-374.

- [5] Bjerknes, J., 1969, Atmospheric teleconnections from the equatorial Pacific. *Mon. Wea. Rev.*, 97, 163-172.
- [6] Burridge, R., and L. Knopoff, 1967. Model and theoretical seismicity, *Bull. Seism. Soc. Am.*, 57, 341-371.
- [7] Collet, P., and J.-P. Eckmann, 1980. *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*. Birkhäuser Verlag, Basel/Boston/Birkhäuser.
- [8] Cowan, G. A., D. Pines and D. Melzer, Eds., 1994. *Complexity: Metaphors, Models and Reality*. Addison-Wesley, Reading, Mass.
- [9] Darby, M. S., and L. A. Mysak, 1993. A Boolean delay equation model of an interdecadal Arctic climate cycle. *Climate Dyn.*, 8, 241-246.
- [10] Dee, D., and M. Ghil, 1984. Boolean difference equations, I: Formulation and dynamic behavior. *SIAM J. Appl. Math.*, 44, 111-126.
- [11] Diaz, H. F., and V. Markgraf, Eds., 1992. *El Niño: Historical and Paleoclimatic Aspects of the Southern Oscillation*. Cambridge Univ Press, New York.
- [12] Gabrielov, A., V. Keilis-Borok, I. Zaliapin, and W. I. Newman, 2000a. Critical transitions in colliding cascades, *Phys. Rev. E*, 62, 237-249.
- [13] Gabrielov, A.M., I. V. Zaliapin, V. I. Keilis-Borok, and W. I. Newman, 2000b. Colliding cascades model for earthquake prediction. *J. Geophys. Intl.*, 143, 427-437.
- [14] Ghil, M., 1994. Cryothermodynamics: The chaotic dynamics of paleoclimate, *Physica D*, 77, 130-159.
- [15] Ghil, M., and S. Childress, 1987. *Topics in Geophysical Fluid Dynamics: Atmospheric Dynamics, Dynamo Theory and Climate Dynamics*, Springer-Verlag, New York/Berlin/London/Paris/ Tokyo, 485 pp.
- [16] Ghil, M., and A. P. Mullhaupt, 1985. Boolean delay equations. II: Periodic and aperiodic solutions. *J. Stat. Phys.*, 41, 125-173.
- [17] Ghil, M., A. P. Mullhaupt, and P. Pestiaux, 1987. Deep water formation and Quaternary glaciations. *Clim. Dyn.*, 2, 1-10.
- [18] Ghil, M., and A. W. Robertson, 2000. Solving problems with GCMs: General circulation models and their role in the climate modeling hierarchy. in D. Randall (Ed.) *General Circulation Model Development: Past, Present and Future*, Academic Press, San Diego, pp. 285-325.

- [19] Glantz, M. H., R. W. Katz, and N. Nicholls, Eds. 1991. *Teleconnections Linking Worldwide Climate Anomalies*. New York: Cambridge Univ. Press.
- [20] Guckenheimer, J., and P. Holmes, 1997. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. 3rd edn., Springer-Verlag, New York.
- [21] Gutowitz, H., 1991. *Cellular Automata: Theory and Experiment*. MIT Press, Cambridge, MA.
- [22] Hénon, M., 1966. La topologie des lignes de courant dans un cas particulier. *C. R. Acad. Sci. Paris.*, 262, 312-414.
- [23] Jensen, M. H., P. Bak, and T. Bohr, 1984. Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. Part I. Circle maps. *Phys. Rev. A*, 30, 1960-1969.
- [24] Jin, F.-f., 1996. Tropical ocean-atmosphere interaction, the Pacific cold tongue, and the El-Niño-Southern Oscillation. *Science*, 274, 76-78.
- [25] Jin F.-f., and J. D. Neelin, 1993a. Modes of interannual tropical ocean-atmosphere interaction — a unified view. I. Numerical results. *J. Atmos. Sci.*, 50, 3477-3503.
- [26] Jin, F.-f., and J. D. Neelin, 1993b. Modes of interannual tropical ocean-atmosphere interaction — a unified view. III. Analytical results in fully coupled cases. *J. Atmos. Sci.*, 50, 3523-3540.
- [27] Jin, F.-f., J. D. Neelin, and M. Ghil, 1994. El Niño on the Devil's Staircase: Annual subharmonic steps to chaos, *Science*, 264, 70-72.
- [28] Jin, F.-f., J. D. Neelin, and M. Ghil, 1996. El Niño/Southern Oscillation and the annual cycle: Subharmonic frequency locking and aperiodicity, *Physica D*, 98, 442-465.
- [29] Kauffman, S. A., 1995. *At Home in the Universe: The Search for Laws of Self-Organization and Complexity*. Oxford University Press, New York.
- [30] Keilis-Borok, V. I., 1996. Intermediate-term earthquake prediction. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 93, 3748-3755.
- [31] Keilis-Borok, V. I., 2002. Earthquake prediction: State-of-the-art and emerging possibilities. *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.*, 30, 1-33.
- [32] Keilis-Borok, V. I. and Shebalin, P. N., Eds., 1999. Dynamics of lithosphere and earthquake prediction. *Phys. Earth Planet. Int.*, 111, 179-330.
- [33] Kellogg, W. W., 1983. Feedback mechanisms in the climate system affecting future levels of carbon dioxide. *J. Geophys. Res.*, 88, 1263-1269.

- [34] Latif, M., T. P. Barnett, M. Flügel, N. E. Graham, J.-S. Xu, and S. E. Zebiak, 1994. A review of ENSO prediction studies. *Clim. Dyn.*, 9, 167-179.
- [35] Lichtenberg, A. J., and M. A. Liebermann, 1992. 2nd edn., *Regular and Chaotic Motion*, Springer-Verlag, New York.
- [36] Lorenz, E. N., 1963. Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20, 130-141.
- [37] Mandelbrot, B., 1975. *Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension*. Flammarion, Paris, 192 pp.
- [38] Mandelbrot, B., 1982. *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman & Co., New York, xii + 461 + xvi pp.
- [39] Mysak, L. A., D. K. Manak, and R. F. Marsden, 1990. Sea-ice anomalies observed in the Greenland and Labrador Seas during 1901-1984 and their relation to an interdecadal Arctic climate cycle. *Climate Dyn.*, 5, 111-113.
- [40] Neelin, J. D., and F.-f. Jin, 1993. Modes of interannual tropical ocean-atmosphere interaction — a unified view. II. Analytical results in fully coupled cases. *J. Atmos. Sci.*, 50, 3504-3522.
- [41] Neelin, J. D., M. Latif, and F.-f. Jin, 1994. Dynamics of coupled ocean-atmosphere models: the tropical problem. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 26, 617-659.
- [42] Newman, W. I., A. M. Gabrielov, and D. L. Turcotte, Eds., 1994. *Nonlinear Dynamics and Predictability of Geophysical Phenomena*, Geophys. Monographs Ser. 83, American Geophysical Union, Washington, DC.
- [43] Nicolis, C., 1982. Boolean approach to climate dynamics. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 108, 707-715.
- [44] Oktem, H., R. Pearson, and K. Egiazarian, 2003. An adjustable aperiodic model class of genomic interactions using continuous time Boolean networks (Boolean delay equations). *Chaos*, 13, 1167-1174.
- [45] Philander, S. G. H., 1990. *El Niño, La Niña, and the Southern Oscillation*, Academic Press, San Diego.
- [46] Rundle, J. B., D. L. Turcotte, and W. Klein, Eds., 2000. *Geocomplexity and the Physics of Earthquakes*. American Geophysical Union, Washington, DC.
- [47] Saunders, A., and M. Ghil, 2001. A Boolean delay equation model of ENSO variability. *Physica D*, 160, 54-78.
- [48] Scholz, C. H., 1990. *The Mechanics of Earthquakes and Faulting*. Cambridge University Press, Cambridge.

- [49] Schuster, H. G., 1988. *Deterministic Chaos: An Introduction*. Physik-Verlag, Weinheim.
- [50] Smale, S., 1967. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73, 747-817.
- [51] Thomas, R., 1973. Boolean formalization of genetic control circuits. *J. Theoret. Biol.*, 42, 563-585.
- [52] Thomas, R., 1978. Logical analysis of systems comprising feedback loops. *J. Theoret. Biol.*, 73, 631-656.
- [53] Thomas, R., Ed., 1979. *Kinetic Logic: A Boolean Approach to the Analysis of Complex Regulatory Systems*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 507 pp.
- [54] Turcotte, D. L., 1997. *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics*, 2nd edn., Cambridge University Press, Cambridge.
- [55] Turcotte, D. L., W. I. Newman, and A. M. Gabrielov, 2000. A statistical physics approach to earthquakes. In: J. B. Rundle, D. L. Turcotte, and W. Klein, Eds., *Geocomplexity and the Physics of Earthquakes*. American Geophysical Union, Washington, DC, pp. 83-96.
- [56] Tziperman, E., L. Stone, M. Cane, and H. Jarosh, 1994. El Niño chaos: Overlapping of resonances between the seasonal cycle and the Pacific ocean-atmosphere oscillator. *Science*, 264, 72-74.
- [57] Wolfram, S., 1994. *Cellular Automata and Complexity: Collected Papers*. Addison-Wesley, Reading, Mass.
- [58] Wright, D. G., T. F. Stocker, and L. A. Mysak, 1990. A note on Quaternary climate modeling using Boolean delay equations. *Clim. Dyn.*, 4, 263-267.
- [59] Zaliapin, I., V. Keilis-Borok, and M. Ghil, 2003a. A Boolean delay equation model of colliding cascades. Part I: Multiple seismic regimes. *J. Stat. Phys.*, 111, 815-837.
- [60] Zaliapin, I., V. Keilis-Borok, and M. Ghil, 2003b. A Boolean delay equation model of colliding cascades. Part II: Prediction of critical transitions. *J. Stat. Phys.*, 111, 839-861.